Polynômes

I) Définitions

Définition telle qu'elle est donnée dans un sujet du concours général :

La fonction f est une ***fonction polynomiale*** :

* si f est nulle

* ou s'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $\boldsymbol{a_n \neq 0}$ tels que,

pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$

Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont alors appelés **coefficients** de la fonction polynômiale f.

L'entier n est appelé **le degré du polynôme** et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant.**

Le degré d'un polynôme constant non nul est donc égal à 0 et, par convention, le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$

Remarque importante : L'écriture d'une fonction polynomiale étant unique, on procédera à des identifications :

Proposition 1 : Une fonction polynômiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Conséquence : $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)x^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0\,;n]\!] : a_k = b_k$

Conséquence : Si deux polynômes sont égaux, alors ils ont le même degré.

Exercice 1 : Pour tout réel x, on a : $ax^2 + (b-2a)x - c = 3x^2 - 5x + 7$ Déterminer la valeur des réels a, b et c.

Correction : $\begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -5 \\ -c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -7 \end{cases}$

Remarques : Dans la suite de ce chapitre, on confondra un polynôme P (que l'on notera $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$)
et sa fonction polynomiale f associée (notée : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$)

On identifiera également le polynôme dérivé P' à la fonction dérivée associée f'

Tout cela est possible car les coefficients seront des réels dans tout ce chapitre

II) Dérivation

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
On suppose que $\deg(f) \geq 1$.

Alors : $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

$$\boxed{deg(f') = deg(f) - 1}$$

Définition : On définit les dérivées successives de f en posant $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$

et pour tout entier m, $f^{(m+1)} = \left(f^{(m)}\right)'$ On dit que $f^{(m)}$ est la dérivée m-ième de f

Exercice 2 : 1) Pour tout réel $x, f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Exprimer. $f^{(3)}(x)$

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x^1 + a_1$$

$$f''(x) = 2 * 3 * a_3x + 1 * 2 * a_2$$

$$f^{(3)}(x) = 2 * 3 * a_3$$ rappel : n ! = 1*2*3…*n

2) Pour tout réel x, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, Exprimer $g^{(n)}(x)$.

$$g^{(n)}(x) = n\,!\,a_n \quad \text{(fonction constante)}\ et \quad g^{(n+1)}(x) = \ 0$$

III) Degré

Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et m.

$\boldsymbol{P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0}$ $\boldsymbol{Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0}$

Quel est le degré de P + Q **?** **Conjecture : P= $3x^3 - x^2 + 1$ $Q = 5x^2 - x$ $donc\ deg\ (P + Q) = 3$**

$$\boldsymbol{Q_1 = -3x^3 + x^2 + 3x - 1 \quad deg(P + Q_1) = 1}$$

Proposition 2 : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P)\,;\deg(Q))$

De plus, si les deux polynômes sont de degrés distincts, il y a égalité.

Démonstration :

Si P = Q = 0 (donc $\deg(P) = \deg(Q) = -C$) alors P + Q = 0 et $\deg(P + Q) = -\infty$

Sinon, on pose $N = Max(\deg(P), \deg(Q))$

Quitte à ajouter des coefficients nuls à P ou à Q, on peut écrire P(X) = $\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ et Q(X) = $\sum_{k=0}^{N} b_k X^k$

On a alors : $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{N}(a_k + b_k)X^k$ donc $\deg(P + Q) \leq N$

Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors a_N ou b_N est non nul et $a_N + b_N \neq 0$. Donc : $\deg(P + Q) = Max(\deg(P), \deg(Q))$

Proposition 3 : $\deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$

(en effet , le terme dominant de PQ est $a_nb_mX^{n+m}$ car $a_nb_m \neq 0$)

Exercice 3: Déterminer tous les polynômes P tels que : $P'(X) + X\,P(X) = X^2 + 1$ (*)

(indice : Montrer d'abord que si P vérifie la relation, alors $\deg(\,P) = 1$)

Correction :

P ne peut clairement pas être le polynôme nul car $X^2 + 1$ n'est pas le polynôme nul.

Si $deg(P) \geq 2$ alors $deg(P' + XP) = deg(XP) \geq 3$. Ce qui est impossible car $deg(X^2 + 1) = 2$.

Si deg(P)=0 alors $deg(P' + XP) = 1$ Ce qui est impossible car $deg(X^2 + 1) = 2$.

Donc $deg(P) = 1$ et il existe $(a\,; b) \in R^2$ rel que $P = aX + b$

$P' + XP = X^2 + 1 \Leftrightarrow a + (aX^2 + bX) = X^2 + 1 \Leftrightarrow aX^2 + bX + 1 = X^2 + 1 \Leftrightarrow a = 1\ et\ b = 0\ Donc\ P = X$

Donc si P vérifie la relation (*) alors P = X (en fait c'est le seul polynôme qui peut-être solution mais il faut encore vérifier qu'il est effectivement solution) (c'est le seul candidat possible…)

Réciproquement, il est clair que P = X vérifie la relation (*) *Conclusion $S = \{X\}$*

IV) Division euclidienne

1) Définitions et propositions

Définition : On dit qu'un polynôme B divise un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ

(on dit aussi que A est divisible par B ou que c'est un multiple de B)

Exemple: $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ donc $X+1$ et $X-2$ divisent $X^2 - X - 2$

Théorème : Si A et B sont deux polynômes (B non nul) alors il existe un unique couple de polynôme (Q,R) tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Q et R sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de A par Q.

démonstration:

1) **Existence**

Notons $p = \deg(B) \geqslant 0$, $B = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j$ (donc $b_p \neq 0$). Nous allons procéder à une récurrence sur le degré de A. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

Pour tout A de $K[X]$ tel que $\deg(A) \leqslant n$, il existe $(Q,R) \in (K[X])^2$ tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

• $\mathcal{P}_0$ est vraie. En effet, si A est une constante, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} Q = 0 \text{ et } R = A, & \text{si } \deg(B) \geqslant 1 \\ Q = Ab_p^{-1} \text{ et } R = 0, & \text{si } \deg(B) = 0. \end{cases}$$

• Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un n de $\mathbb{N}$, et soit $A \in K[X]$ tel que $\deg(A) = n+1$. Notons $A = \sum_{i=0}^{n+1} a_i X^i$, et considérons :

$$Q_{n+1} = a_{n+1} b_p^{-1} X^{n+1-p} \text{ et } R_{n+1} = A - BQ_{n+1}.$$

Par le choix de Q_{n+1}, les termes de degré $n+1$ de A et de BQ_{n+1} sont les mêmes, donc $\deg(R_{n+1}) \leqslant n$.

D'après $\mathcal{P}_n$, il existe $(Q_n, R_n) \in (K[X])^2$ tel que :

$$R_{n+1} = BQ_n + R_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(B).$$

En notant $Q = Q_{n+1} + Q_n$ et $R = R_n$, on a :

$$A = BQ_{n+1} + (BQ_n + R_n) = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

2) **Unicité :** On suppose qu'il existe deux couples de polynômes (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) tels que :

$$A = BQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg(R_1) < \deg(B)$$

$$\text{et } A = BQ_2 + R_2 \text{ avec } \deg(R_2) < \deg(B)$$

On a donc l'égalité : $BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \Leftrightarrow B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ (*)

Si $Q_1 \neq Q_2$ alors $Q_1 - Q_2 \neq 0$ et $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(B)$

or $\deg(R_2 - R_1) \leq Max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$ Contradiction. Donc $\boldsymbol{Q_1 = Q_2}$

Donc, d'après (*), $R_1 = R_2$ L'unicité du couple (Q, R) est ainsi prouvée.

Définition : On dit que le nombre a est une racine d'un polynôme P lorsque $P(a) = 0$

Proposition 4 : soit P un polynôme. a est une racine de P ⇔ (X – a) divise P

Démonstration :

<= Si $(X-a)$ divise P , alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)Q$ et on a donc $P(a) = (a-a)Q(a) = 0$.

⇨ Supposons que a soit une racine de P. effectuons la division euclidienne de P par $(X-a)$

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R)tel que : P = $(X-a)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X-a) = 1$

Donc le polynôme R est un polynôme constant .

Or $0 = P(a) = (a-a)Q(a) + R(a)$ donc $R(a) = 0$ et R étant constant, on a $R = 0$ et $P = (X-a)Q$

Proposition 5: Soit $n \in N^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n racines distinctes d'un polynôme A alors $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$ divise A.

Démonstration : Récurrence sur n.

On note : $\mathcal{P}(n)$ la propriété ci-dessus.

* $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la propriété précédente.

*On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in N^*$ et on considère $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ racines distinctes de A.

D'après $\mathcal{P}(n)$, A se factorise déjà sous la forme $A = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\ Q$ où Q est un polynôme.

$A(a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k)\, Q(a_{n+1}) = 0$ (a_{n+1} est une racine)

Or, les racines étant distinctes :$\prod_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k) \neq 0$ donc $Q(a_{n+1}) = 0$ et Q s'écrit donc sous la forme

$Q = (X- a_{n+1})Q_1$ donc $A = \prod_{k=1}^{n+1}(X-a_k)Q_1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie

* $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, on conclut qu'elle est vraie pour tout $n \in N^*$.

2) Exemples de divisions euclidiennes

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$$

On peut vérifier rapidement que -5 est une racine. $f(x)$ est donc factorisable par $(x+5)$

Voici 2 méthodes permettant d'effectuer la factorisation :

***identification des coefficients (voir proposition 1 et exemple 1)**

Déterminer les réels a, b et c tels que $x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x+5)(ax^2 + bx + c)$

$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x+5)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - x - 30 = ax^3 + bx^2 + cx + 5ax^2 + 5bx + 5c$

$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - x - 30 = ax^3 + (b+5a)x^2 + (c+5b)x + 5c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 5a = 6 \\ c + 5b = -1 \\ 5c = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases}$ conclusion : $x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x+5)(x^2 + x - 6)$

***On peut poser une division en suivant le même genre de protocole que dans les divisons enseignées en primaire.**

-Par quoi faut-il multiplier le x de x + 5 pour obtenir x^3 ? par x^2

Puis on multiplie x + 5 par x^2 et on soustrait le résultat à $x^3 +6x^2 -x -30$

On obtient x^2

On abaisse ensuite le -x

-Par combien faut-il multiplier le x de x+5 pour obtenir le x^2 bleu ? par x

Puis on multiplie x + 5 par x et on soustrait le résultat à x^2-x

On obtient -6x et on abaisse -30.

- Par combien faut-il multiplier le x de x+5 pour obtenir le -6x bleu ? par -6.

Après soustraction, on obtient un reste nul et on en conclut que

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \hline -x^3-5x^2 & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \hline x^2-x & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \hline x^2-x & x^2+x \\ -x^2-5x & \\ -6x-30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \hline x^2-x & x^2+x-6 \\ -6x-30 & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^3+6x^2-x-30=(x+5)(x^2+x-6)$$

Le trinôme $x^2 + x - 6$ peut ensuite se factoriser facilement en déterminant ses racines.

On obtient : $\boldsymbol{x^3+6x^2-x-30=(x+5)(x-2)(x+3)}$

Attention : Le reste d'une division n'est pas toujours nul.

Exercice 4 : Effectuer la division euclidienne de $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12$ par x^2-1

La division s'arrêt lorsque le degré du reste est strictement inférieur à celui du diviseur.

On obtient ainsi **:** $\boldsymbol{x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12 = (x^2-1)(x^2+3x-1)+10x-13}$

$$\begin{array}{r|l} x^4+3x^3-2x^2+7x-12 & x^2-1 \\ \hline 3x^3-x^2 & x^2+3x-1 \\ -x^2+10x & \\ 10x-13 & \end{array}$$

Exercice 5 : Effectuer la division euclidienne de $6x^4-2x^3+9x^2-2x-2$ par x^2+2

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -2x^3 & +9x^2 & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} -6x^4 & & -12x^2 & & & 6x^2-2x-3 \\ \hline & -2x^3 & -3x^2 & -2x & -2 & \\ & 2x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-5} & & -3x^2 & +2x & -2 & \\ & & 3x^2 & & +6 & \\ \cline{3-5} & & & 2x & +4 & \end{array}$$

3) Application : Lever une forme indéterminée dans le calcul d'une limite

Exercice 6 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}$

C'est un cas sournois d'indétermination de type 0/0.

L'idée est de factoriser par $(x-2)$ le numérateur (par exemple en le divisant par $(x-2)$) et le dénominateur.

On peut ensuite procéder à une simplification et le tour est joué !

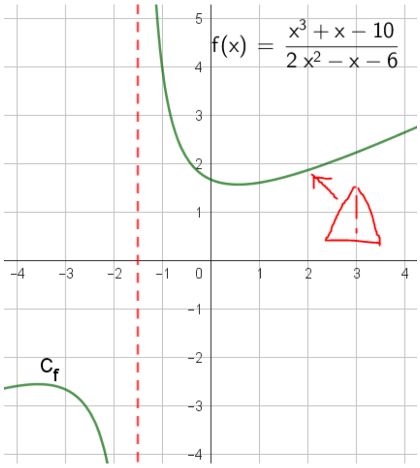
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+5)}{(x-2)(2x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+5}{2x+3} = \frac{13}{7}$$

Attention , graphiquement, on visualise bien le fait que la fonction n'est pas définie en $-\frac{3}{2}$ mais il faut garder en tête qu'elle n'est pas non plus définie en 2.

Il y a en fait un « trou » (invisible) dans le tracé de la courbe : elle est discontinue en 2.

Par contre , si on pose : $f(2) = \frac{13}{7}$ alors elle devient continue en 2.

On dit que l'on a effectué un prolongement par continuité en 2.



Proposition 4 : Soit $n \in N$ et A un polynôme de degré au plus n.

A est le polynôme nul ⇔ A admet au moins $n+1$ racines distinctes

Démonstration :

⇨ Evident

<= Si A admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors d'après la proposition précédente :

A = $\prod_{k=1}^{n+1}(X-a_k)Q_1$ où Q_1 est un polynôme.

Si $Q_1 \neq 0$, on aurait $\deg(A) = \deg(\prod_{k=1}^{n+1}(X-a_k)Q_1) \geq n+1$, ce qui est impossible car $\deg(A) \leq n$.

Il y a une contradiction donc on en déduit que notre hypothèse est fausse

Donc $Q_1 = 0$ et par conséquent, A = 0.

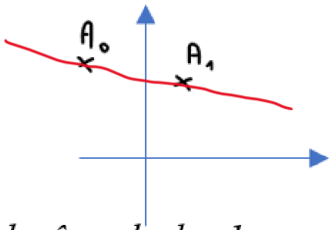
APPLICATION : Les polynômes de LAGRANGE

Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction pour laquelle on connaît les images de $n + 1$ nombres distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a ; b]$

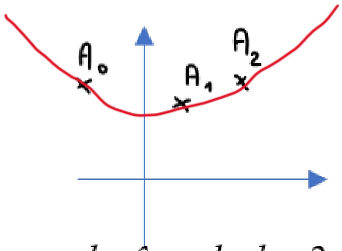
Le but est de construire une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n

dont la courbe représentative passe par les points $A_0(x_0 , f(x_0))$, $A_1(x_1 , f(x_1))$ …. $A_n(x_n , f(x_n))$

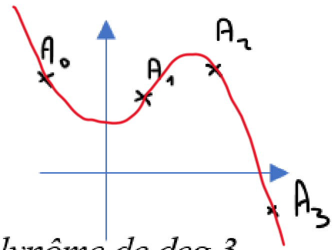
c'est-à-dire que : $\forall j \in [\![0, n]\!] \quad P(x_j) = f(x_j)$



polynôme de deg 1



polynôme de deg 2



polynôme de deg 3

Théorème : Si une telle fonction P existe, alors elle est unique.

Démonstration : Soit Q un autre polynôme solution de notre problème.

Alors $\forall j \in [\![0, n]\!] \quad Q(x_j) - P(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0 \quad et\ donc\ (Q - P)(x_j) = 0$

Donc le polynôme Q-P a n+1 racines or deg (Q-P) $\leq n$ donc d'après la proposition précédente, Q-P est le polynôme nul. Donc Q=P .

Théorème : Il existe un polynôme solution de ce problème (et il est donc unique d'après le théorème précédent)

Ce polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{k=0\ k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Les polynômes $L_i(x)$ sont applelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

Démonstration :

**Existence :* Il suffit de vérifier que le polynôme proposé est bien solution du problème.

Remarquons d'abord que

$$\forall j \in [\![0, n]\!] \quad : \quad L_i(x_j) = \prod_{k\neq i}^{n} \frac{(x_j - x_k)}{(x_i - x_k)} = (\prod_{k\neq i}^{n} (x_j - x_k))/(\prod_{k\neq i}^{n} (x_i - x_k)) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1\ si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{cases}$$

En effet :

Si $i \neq j$: k prend toutes les valeurs autres que i , donc il prendra la valeur j à un moment donné et le numérateur sera nul.

Si $i = j$: Le numérateur est égal au dénominateur….

Le polynôme $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ convient car :

$$\forall j \in [\![0, n]\!] : \boldsymbol{P_n(x_j)} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x_j) = \boldsymbol{f(x_j) * L_j(x_j)} = \boldsymbol{f(x_j)}$$

En effet,comme indiqué ci-dessus, pour toutes les valeurs de i différentes de j , $L_i(x_j) = 0$.

Exercice 7 : **Le but est de construire une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $n = 2$**

dont la courbe représentative passe par les 3 points $A_0(-1\,;6)$ $A_1(1\,;0)$ …. $A_2(2\,;3)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Exrpimons d'abords les polynômes de base L_0 et L_2

Il est inutile de s'intéresser à L_1 car $f(x_1) = f(1) = 0$ d'après l'énoncé.

$$L_i(x) = \prod_{k=0\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

$$L_0(x) = \prod_{k=1}^{2} \frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} * \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-1}{-2} * \frac{x-2}{-3} = \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$L_2(x) = \prod_{k=0}^{1} \frac{(x-x_k)}{(x_2-x_k)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} * \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x+1}{3} * \frac{x-1}{1} = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

$$P_n(x) = f(-1)L_0(x) + f(2)L_2(x) = 6 * \frac{1}{6}(x^2-3x+2) + 3 * \frac{1}{3}(x^2-1) = \underline{\mathbf{2x^2 - 3x + 1}}$$

On vérifie bien sûr que les 3 images sont correctes…

Pour s'entraîner sur un autre exemple, il suffit d'écrire une fonction polynomiale de degré n , de déterminer l'image de $n+1$ nombres et de « s'amuser » à retrouver la fonction grâce aux polynômes de Lagrange.

Proposition 6 : Relations coefficients/racines : polynôme de degré 2

Soient S, P, x_1, x_2 quatre nombres réels.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1\, x_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines du polynômes } X^2 - SX + P$$

Preuve :

⇨ $X^2 - SX + P = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1\, x_2 = (X - x_1)(X - x_2)$ donc x_1 et x_2 sont bien les racines du polynôme

<= $x_1 = \frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}$ et $x_2 = \frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}$ on a bien $x_1 + x_2 = S$ et $x_1\, x_2 = P$

Exercice 8 :

1) On remarque que 2 est solution de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. Quelle est l'autre solution ?

2) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 16m et une aire de 8 m² ? Si oui, donner sa longueur et sa largeur.

Correction :

1) le produit des racines est égal à 6. Donc la deuxième racine est 3.
On aurait pu dire aussi : la somme des racines vaut -(-5) soit 5, et on retrouve 3 comme deuxième racine réelle.

2/ soit x_1 la longueur et x_2 la largeur du rectangle
Périmètre = 16 ⇔ $2x_1+2x_2 = 16$ ⇔ $2(x_1+x_2) = 16$ ⇔ ⇔ $x_1+x_2 = 8 = S$ et aire = 8 ⇔ $x_1x_2 = 8 = P$

Donc x_1 et x_2 seraient les racines réelles de l'équation $x^2 - 8x + 8 = 0$ (*) d'après la proposition 6.

Le discriminant est positif, donc l'équation (*) admet 2 racines réelles: $x_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ et $x_1 = 4 - 2\sqrt{2}$

V) Multiplicité (ou ordre) d'une racine

Définition : a est une racine de multiplicité $m \geq 1$ si $(X-a)^m$ divise A et que $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas A.

Si m=1 , on parle de racine simple. Si m=2 , on parle de racine double. Si m=3 , on parle de racine triple.

Proposition 5 : soit P un polynôme.

a est une racine d'ordre $m \geq 1$ de P $\Leftrightarrow P(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Illustration : $P(X) = X^2 - 6X + 9 \quad \Delta = 0 \quad$ *donc une racine* double ou de multiplicité 2 : $x_0 = 3$

Donc $P(X) = (X-3)^2 \qquad P'(X) = 2X - 6 \qquad$ P''(X)=2 $\qquad$ 3 est bien racine de P et de P' mais pas de P''

Exercice 9: multiplicité d'une racine

Soient a et b deux réels et P le polynôme tel que $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$

1) Montrer que si le réel 1 est racine de P, son ordre de multiplicité est au moins 2.

2) Existe-t-il des réels a et b tels que le réel 1 soit racine de P d'ordre supérieur à 2 ?
Si oui, quel est alors son ordre de multiplicité ?

Correction :

1. $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$, $P'(X) = 4X^3 + 3aX^2 + 2bX + a$.

Supposons 1 racine de P alors $P(1) = 0$ donc $1 + a + b + a + 1 = 0$ c'est-à-dire $2a + b + 2 = 0$.

On en déduit $P'(1) = 4 + 3a + 2b + a = 4a + 2b + 4 = 2(2a + b + 2) = 0$.

Ainsi $P(1) = 0 \Rightarrow P'(1) = 0$.

Conclusion : Si 1 est racine de P c'est une racine au moins double.

2. $P''(X) = 12X^2 + 6aX + 2b$.

"1 racine de P d'ordre au moins 3" équivaut à " $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ ".

Or d'après les calculs précédents $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ "$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b & = & -2 \\ 3a + b & = & -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & -4 \\ b & = & +6 \end{cases}$

Ainsi la réponse à la question est "oui".

Alors $P(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 = (X-1)^4$.

Dans ce cas l'ordre de la racine 1 est 4.

Exercice 10 : multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme.

On appelle Q le polynôme défini par $Q(X) = (X - a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big)$

Montrer que a est une racine d'ordre supérieur ou égal à 2.

Il faut montrer que a est racine de Q et de sa dérivée ($Q(a) = Q'(a) = 0$)

$$Q(a) = (a - a)\big(P'(a) + P'(a)\big) - 2\big(P(a) - P(a)\big)$$

$$Q(a) = 0 * \big(P'(a) + P'(a)\big) - 2 * 0 = 0$$

Attention : pour dériver Q , on pose U=X-a et V = P'(X)+P'(a) et on utilise la formule du produit.

De plus, attention, P'(a) et P(a) sont des constantes.

$$Q'(X) = \big(P'(X) + P'(a)\big) + (X - a)P''(X) - 2\,P'(X)$$

Donc

$$Q'(a) = \big(P'(a) + P'(a)\big) + (a - a)P''(a) - 2\,P'(a) = 0$$

VI) Exercices

Exercice 11 : Les polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in N}$ de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1,\ \ T_1(X) = X\ \ ,et\ \ \forall n \in N : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

1) Calculer T_2, T_3 *et* T_4

On trouve successivement :

$T_2(X) = 2X\,T_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1.$

$T_3(X) = 2X\,T_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X.$

$T_4(X) = 2X\,T_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$

2) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n : $\deg(T_n) = n$ puis déterminer le coefficient dominant de T_n

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\deg T_n = n$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok

Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 0$ et $n+1$. Au rang $n+2$:

On sait $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Par hypothèse de récurrence $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n+1$ d'où $\deg XT_{n+1} = n+2$.

Par somme de polynômes de degré distincts : $\deg T_{n+2} = n+2$.

Récurrence établie.

Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.

Pour $n \geq 1$, la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, implique, connaissant le degré de chaque polynôme, que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n.

Par suite, pour $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

3) Etude de la parité

a) Conjecturer la parité de T_n en fonction de n

b) Prouver par récurrence que : $\forall n \in N \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

Il suffit de prouver, pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : T_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n T_n(\mathrm{X})$.

Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).

On se donne $n \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-\mathrm{X}) &= 2(-\mathrm{X})T_{n+1}(-\mathrm{X}) - T_n(-\mathrm{X}) = 2(-\mathrm{X})(-1)^{n+1}T_{n+1}(\mathrm{X}) - (-1)^n T_n(\mathrm{X}) \\ &= (-1)^{n+2}(2\mathrm{X}\,T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n a la parité de n.

4) Prouver que $\forall n \in N \quad , T_n(1) = 1$

La relation $T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.
Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1$.

5) Montrer que $\forall\ (m,n) \in N^2 \quad , \quad m \leq n \ \Rightarrow\ 2T_nT_m = T_{m+n} + T_{n-m}$

On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : "$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$".

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geqslant 0$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1}, T_n et T_{n+1} (car $T_1 = \mathrm{X}$).

On se donne $m \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_nT_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geqslant m+2$.

On forme alors $2\mathrm{X}(E_1) - (E_0)$ et on obtient :

$2T_n(2\mathrm{X}\,T_{m+1} - T_m) = (2\mathrm{X}\,T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2\mathrm{X}\,T_{n-m-1} - T_{n-m})$, c'est-à-dire

$2T_nT_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence.

6) Montrer que $\forall\ (m,n) \in N^2 \quad , \quad T_m\big(T_n(X)\big) = T_{mn}(X)$

On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geqslant 0$.

Les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont évidentes car $T_0 = 1$ et $T_1 = \mathrm{X}$.

On se donne $m \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On substitue $T_n(\mathrm{X})$ à X dans l'égalité $T_{m+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_{m+1}(\mathrm{X}) - T_m(\mathrm{X})$.

On en déduit, pour tout n de $\mathbb{N}$, et en utilisant $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$:

$T_{m+2}(T_n(\mathrm{X})) = 2T_n(\mathrm{X})\,T_{m+1}(T_n(\mathrm{X})) - T_m(T_n(\mathrm{X})) = 2T_n(\mathrm{X})\,T_{(m+1)n}(\mathrm{X}) - T_{mn}(\mathrm{X})$

Mais d'après (3) on a $2T_n\,T_{(m+1)n} = T_{(m+2)n} - T_{mn}$.

On en déduit $T_{m+2}(T_n(\mathrm{X})) = T_{(m+2)n}(\mathrm{X})$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence.

Exercice 12 : On recherche les polynômes non nuls divisibles par leur propre dérivée

On procède en quatre étapes.

1ère étape : On montre que le problème a un sens en exhibant des exemples de solutions.

2ième étape : On suppose le problème résolu pour un polynôme non nul et on en déduit la forme nécessaire d'un tel polynôme.

3ième étape : Réciproquement on vérifie que la forme particulière trouvée est une solution.

4ième étape : On résout complètement le problème.

1) Vérifier que les polynômes $P(X) = X$; $P(X) = X - 1$ et $P(X) = (X+1)^2$ font partie des solutions
2) On suppose que le polynôme P , de degré n , de coefficient dominant a_n, est divisible par son polynôme P'.
   a) Démontrer que $n \geq 1$

Le polynôme P étant non nul, il possède un degré n tel que $n \in N$.

Raisonnons par l'absurde, supposons $n = 0$, alors $P' = 0$ et P, non nul, ne peut pas être multiple de P'.

Conclusion : $n \in N^*$.

   b) Démontrer qu'il existe un réel $\propto$ tel que $P(X) = \frac{1}{n}\ (X - \propto)P'(X)$

Aide simple

Soit Q le polynôme tel que $P = QP'$, utiliser les degrés de P et P' puis les coefficients dominants pour trouver la forme de Q.

Solution détaillée

Puisque P' divise P, il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$ (*).

Donc $deg(P) = deg(Q) + deg(P')$ et $deg(Q) = n - (n-1) = 1$.

Alors il existe deux réels a, b tels que $a \neq 0$, $Q(X) = aX + b$.

Les coefficients dominants des polynômes P, Q, P' sont respectivement a_n, a, na_n.

L'égalité (*) implique $a_n = a \times na_n$, d'où $a = \frac{1}{n}$ car $a_n \neq 0$.

On en déduit $Q(X) = \frac{1}{n}X + b = \frac{1}{n}(X + nb) = \frac{1}{n}(X - \alpha)$, si on désigne par α le réel $-nb$.

Conclusion : Il existe un réel α tel que $P(X) = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'(X)$.

   c) Démontrer que si k $est\ un\ entier$ $0 \leq k \leq n$ alors $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k}\ (X - \propto)P^{(k+1)}(X)$

⊝ **Aide simple**

Raisonner par récurrence.

⊝ **Solution détaillée**

Raisonnons par récurrence.

Soit $R(k)$ la relation $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}(X)$.

$R(0)$ est satisfaite d'après la question b.

Supposons $0 \leq k < n-1$ et $R(k)$ satisfaite, donc

$P^{(k+1)}(X) = \left(\frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}(X)\right)' = \frac{1}{n-k}P^{(k+1)}(X) + \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)}(X)$

d'où $\left(1-\frac{1}{n-k}\right)P^{(k+1)}(X) = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)}(X)$

puis $P^{(k+1)}(X) = \frac{1}{n-k-1}(X-\alpha)P^{(k+2)}(X)$.

Donc $R(k+1)$ est satisfaite.

Ceci termine le raisonnement par récurrence.

d) Démontrer que le polynôme P vérifie l'égalité $P(X) = a_n(X-\alpha)^n$

Solution détaillée

En appliquant le résultat précédent successivement aux entiers $0, 1, \dots, n-1$, on démontre par récurrence :

$P(X) = \frac{1}{n}(X-\alpha)P'(X)$ $P(X) = \frac{1}{n(n-1)}(X-\alpha)^2P''(X)$

$\dots P(X) = \frac{1}{n(n-1)\dots 1}(X-\alpha)^nP^{(n)}(X)$

or $P^{(n)}(X) = n(n-1)\dots 1a_n = n!a_n$.

D'où $P(X) = a_n(X-\alpha)^n$.

3) Soit $A(X) = \delta\,(X-\alpha)^n$ où $(n, \delta, \alpha) \in N^* x\, R^* x\, R^*$

Vérifier que le polynôme A est une solution du problème

$A(X) = \delta(X-\alpha)^n$, $A'(X) = n\delta(X-\alpha)^{n-1}$ donc $A(X) = \frac{1}{n}(X - \text{\apha})A'(X)$.

Ainsi le polynôme A est divisible par son polynôme dérivé A'.

4) Décrire l'ensemble des solutions du problème.

Le polynôme nul est, de façon évidente, une solution.

D'après les questions 2. et 3., un polynôme non nul P de degré n est solution si et seulement si $n \neq 0$ et P est de la forme $A(X) = \delta(X-\alpha)^n$ où $(\delta, \alpha) \in R^* \times R$.

Donc $S = \{\lambda(X-\alpha)^n; (n, \lambda, \alpha) \in N^* \times R^2\}$.

Remarque : Quand le réel λ est nul, on obtient le polynôme nul.

VII) EXTRAITS DU CONCOURS GENERAL

1) Exercice 1 du sujet 2019

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés :

(P1) $\mathscr{S}$ contient u et v.

(P2) $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.

(P3) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f + g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P4) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P5) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geqslant g$, alors $f - g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P6) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1) Soit $\mathscr{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**.
   a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathscr{T}$.
   b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{T}$.
   c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathscr{T}$.
   d) Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{T}$?

2) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{U}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)** et **(P5)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P6)**. La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable ?

3) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{V}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P3)**.
   a) Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par

$$Q_d(x) = (x+1)^d - 1.$$

   Montrer que $Q_d \in \mathscr{V}$.
   b) Soit d un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers $a_1, \ldots, a_d$ supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + 1.$$

   Étant donné un nombre réel $x \geqslant 0$, on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres d et $\dfrac{x}{1+x}$.

   c) Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \geqslant 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geqslant 0$, associe

$$c(x + x^2 + \cdots + x^d) - f(x)$$

   est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
   d) En déduire que, si f est une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ telle que $f(0) = 0$, alors f est dans $\mathscr{V}$.

CORRECTION

Dans ce problème, il est question de déterminer quels sont les ensembles E de fonctions définies sur $[0\ ;+\infty[$ et prenant leurs valeurs dans $[0\ ;+\infty[$ qui satisfont une liste de cinq ou six propriétés.

- *La propriété (P3) est la stabilité pour l'addition (la somme de deux fonctions de E appartient à E).*
- *La propriété (P4) est la stabilité pour la composition (la composée de deux fonctions de E appartient à E).*
- *La propriété (P6) est la stabilité pour la multiplication (le produit de deux fonctions de E appartient à E).*

Les propriétés (P1) et (P2) introduisent quelques « briques » élémentaires permettant de bâtir l'édifice E en question. Mais lequel ? C'est ce que nous allons voir.

1.a. D'après la propriété (**P1**), les fonctions u et v appartiennent à **T**. D'après la propriété (**P4**), leur composée $v \circ u$ définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $v \circ u\ (x) = \ln\left(\left(e^x - 1\right) + 1\right) = \ln\left(e^x\right) = x$ appartient à **T**.
La fonction identique $id_{[0;\,+\infty[}$ notée I dans ce problème : $x \mapsto I(x) = x$ appartient à **T**.

1.b. La fonction identique appartient à **T** et, d'après la propriété (**P2**), **T** contient les constantes positives.
D'après la propriété (**P6**), l'ensemble **T** contient le produit de la fonction I par toute constante positive :
Toutes les fonctions linéaires $x \mapsto a\,x$ où a est un coefficient positif appartiennent à **T**.

D'après la propriété (**P3**), toute somme d'une fonction linéaire de coefficient positif et d'une constante positive appartient à **T** : toutes les fonctions affines $x \mapsto a\,x + b$ où a et b sont des constantes positives appartiennent à **T**.

Soit réciproquement $x \mapsto f(x) = a\,x + b$ une fonction affine.

- Si $a < 0$, l'image par f de l'intervalle $\left]\frac{b}{a}, +\infty\right[$ est incluse dans $]-\infty, 0[$. f n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à **T**.
- Si $a = 0$ et $b < 0$, l'image par f de $[0, +\infty[$ est un réel négatif, f n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à **T**.

- Si $a>0$ et $b<0$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{b}{a}\right[$ est incluse dans $\left]-\infty, 0\right[$, f n'est pas à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$, cette fonction n'appartient pas à **T**.

Par conséquent, les fonctions affines $x \mapsto a\,x+b$ où a et b sont des constantes positives appartiennent à **T**, et ce sont les seules fonctions affines qui appartiennent à **T**. Notons qu'il s'agit là des fonctions polynomiales du premier degré définies sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et à valeurs dans $\left[0\,;+\infty\right[$.

1.c. En vertu de la propriété (**P6**), dès lors que la fonction identique appartient à **T**, toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ appartiennent à **T** (elles sont produit n fois de la fonction identique) ainsi que toutes les fonctions monômes : $x \mapsto a_n\,x^n$ où a_n est un coefficient positif.

En vertu de la propriété (**P3**), toute fonction polynomiale $x \mapsto a_d\,x^d+\ldots+a_0$ où tous les a_i sont des coefficients positifs appartient à **T** (elles sont sommes de monômes).

Il en est ainsi de la fonction polynomiale : $x \mapsto 2\,x^2+4$.

Quant à la fonction $x \mapsto 3x$, en tant que fonction linéaire à coefficient positif, elle appartient à **T**.

Pour tout x positif : $p(x)=\left(2\,x^2+4\right)-3\,x=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}\geq 0$: la différence entre la fonction $x \mapsto 2\,x^2+4$ et la fonction $x \mapsto 3\,x$ est une fonction positive sur $\left[0, +\infty\right[$. En vertu de la propriété (**P5**), cette différence appartient à **T**. La fonction $x \mapsto p(x)=2\,x^2-3\,x+4$ appartient à **T**.

1.d. Soit f une fonction polynomiale $x \mapsto f\,(x)=a_d\,x^d+\ldots+a_0$ avec $a_d \neq 0$ définie sur $\left[0, +\infty\right[$ et à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$. Avoir des valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$ signifie admettre un minimum m positif sur $\left[0, +\infty\right[$.

Deux conditions au moins sont nécessaires pour cela :

- $a_d>0$ (si $a_d<0$, f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, elle n'est pas à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$).
- $a_0 \geq 0$ (si $a_0<0$, $f\,(0)<0$, f n'est pas non plus à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$).

Soit U la partie de l'ensemble des coefficients $\left\{a_d, \ldots, a_0\right\}$ contenant les coefficients positifs ou nuls. Cette partie n'est pas vide, car elle contient au moins a_d et a_0. Soit V la partie (éventuellement vide) de l'ensemble $\left\{a_d, \ldots, a_0\right\}$ contenant les coefficients strictement négatifs.

Si V est vide, f appartient à **T** comme on l'a noté dans **1.c.**

Sinon, posons : $g(x)=\sum_{a_i \in U} a_i\,x^i$ et $h(x)=\sum_{a_i \in V} -a_i\,x^i$. Ces deux fonctions polynomiales sont à coefficients positifs, elles appartiennent toutes les deux à **T**.

Pour tout x de $\left[0, +\infty\right[$: $g(x)-h(x)=f\,(x)\geq m \geq 0$. la différence $g-h$ est une fonction positive sur $\left[0, +\infty\right[$. En vertu de (**P5**), cette différence appartient à **T**. Toute fonction polynomiale définie sur $\left[0, +\infty\right[$ et à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$ appartient à **T**.

Exercice 1 du sujet 2018 : **Les polynômes de Bernstein**

Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0;1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n. Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$; $B_{1,0}(p) = 1-p$ et $B_{1,1}(p) = p$.
Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein.***

1° (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.

(b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.

2° (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?

(b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + p\,B_{n-1,i-1}(p).$$

3° (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0;1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ?
On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i.

(b) Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$?

4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à dire, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \ldots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

CORRECTION

Lien vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=coGd2ykgYfg